

# Indice

<b>Prefazione</b>	v
<b>Introduzione</b>	1
<b>Capitolo 1. Preliminari</b>	7
1.1. Alcuni risultati relativi alla misura e all'integrale di Lebesgue. Misura e dimensione di Hausdorff.	7
1.2. Spazi di Lebesgue $L^m$ .	16
1.3. Spazi di Sobolev $W^{1,m}$ .	21
1.4. Funzioni assolutamente continue.	32
1.5. Funzioni convesse.	32
1.6. Compattezza debole in spazi riflessivi e teorema di Mazur.	33
1.7. Proprietà elementari delle funzioni armoniche.	35
1.8. Disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche positive.	42
<b>Capitolo 2. Metodi classici (indiretti) nel Calcolo delle     Variazioni: variazione prima e variazione seconda</b>	45
2.1. Metodi classici nel Calcolo delle Variazioni: caso unidimensionale.	45
2.2. Metodi classici nel Calcolo delle Variazioni: caso multidimensionale.	48
2.3. Due problemi variazionali classici: la brachistocrona e la disuguaglianza isoperimetrica in dimensione $n = 2$ .	54
<b>Capitolo 3. Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni</b>	61
3.1. Teorema di Weierstrass-Fréchet.	64
3.2. Semicontinuità inferiore e teorema di esistenza per problemi variazionali unidimensionali ( $n = 1$ ): risultati di Tonelli.	65
3.3. Estensione dei teoremi di Tonelli a integrali multipli ( $n \geq 2$ ) del Calcolo delle Variazioni in spazi di Sobolev.	72
<b>Capitolo 4. Semicontinuità forte-debole su spazi prodotto</b>	77
4.1. Risultati di De Giorgi e di Ioffe.	77
4.2. Funzionali convessi e sequenziale debole semicontinuità inferiore.	78
4.3. Teorema di semicontinuità di De Giorgi.	80
4.4. Teorema di semicontinuità di Ioffe.	86

4.5.	Teorema di esistenza e unicità dei minimi per problemi variazionali.	88
4.6.	Un risultato di esistenza nella teoria del controllo ottimo.	90
Capitolo 5. <b>Caso vettoriale.</b>		
	<b>Funzioni quasi-convesse, policonvesse, convesse di rango uno e loro relazioni</b>	93
5.1.	Condizioni necessarie per la semicontinuità inferiore dei funzionali $\mathcal{F}[u, v] := \int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx \quad \text{e}$ $\mathcal{F}[u] := \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx.$	94
5.2.	Condizioni sufficienti per la debole semicontinuità inferiore in ipotesi di quasi-convessità: teoremi di Morrey, Marcellini, Acerbi-Fusco.	108
Capitolo 6. <b>Lagrangiane nulle</b>		
6.1.	Definizione e proprietà.	113
6.2.	Debole continuità dei determinanti. Applicazione a funzionali policonvessi.	116
Capitolo 7. <b>Metodi diretti: regolarità interna</b>		
7.1.	Regolarità: il caso scalare.	122
7.2.	Un risultato unidimensionale di Tonelli e fenomeno di Lavrentieff.	122
7.3.	Soluzioni deboli dell'equazione di Eulero e derivate seconde per i minimi.	127
7.4.	Caso modello multidimensionale: integrale di Dirichlet e lemma di Caccioppoli-Weyl.	134
7.5.	Regolarità ellittica: teoremi di Schauder e di De Giorgi-Nash-Moser. Il caso dei funzionali quadratici.	140
7.6.	Estensione del teorema di maggiore regolarità a funzionali non necessariamente quadratici.	152
7.7.	Regolarità: il caso vettoriale.	153
7.8.	Esempio di estemale discontinua per un problema variazionale di tipo ellittico (De Giorgi, 1968).	153
7.9.	Un caso di regolarità parziale negli spazi di Hölder.	157
Bibliografia		159